数理解析研究所講究録
38巻 1968年 41-50

Contingent equation と制御問題 2

神大 理　菊池 紀夫

§1. Contingent equation

Contingent equation

$$dx/dt \in F(t,x)$$

について考えよう。 xはn次元ユークリッド空間 R^n における点を，tは実変数をあらわす。 $F(t,x)$は $[t_0, t_0+a]\times R^n$ で定義され，値を R^n の Compact set にとる函数である。

この微分不等式を一般化した Contingent equation は次の様な問題に関係して考えられる。

1). Vector field $f(t,x)$ が正確には求められずに近似的に（ある誤差の範囲内で）わかっているとき。

2). (t,x) に関する滑らかさの落ちた Vector field $f(t,x)$ に対応する微分方程式の解の存在はわからないが $f(t,x)$ を適当に set value な函数 $F(t,x)$ に拡張すれば，$F(t,x)$ に対応する contingent equation の解の存在は示すことが

できる。たとえば，$f(t, x)$ は有界で t に関して可測であるとき，次の contingent equation をみたす絶対連続な $x(t)$ は存在する。

$$dx(t)/dt \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{conv}\, f(t, V(x(t), 1/n)).$$

3). 制御函数のはいった微分方程式。

ここでは最後にあげた問題を考える。すなわち，制御函数のはいった微分方程式を contingent equation とみなし，制御問題を調べることを contingent equation の解の性質を調べることに帰着させて考える。

次の関係があたえられているとしよう。

$$d\,x(t)/dt = f(t, x(t), u(t)),$$

$$u(t) \in \Omega(t, x(t)).$$

ここに，$f(t, x, u)$ は $[t_0, t_0+a] \times R^n \times R^r$ で定義され値を R^n にとる函数，$\Omega(t, x)$ は $[t_0, t_0+a] \times R^n$ で定義され値を R^r の中の compact set にとる函数，$u(t) \in R^r$ は $[t_0, t_0+a]$ で可測な函数とする。

上の関係をみたす $x(t)$ は次の関係をみたす。

$$d\,x(t)/dt \in f(t, x(t), \Omega(t, x(t))).$$

逆にこの contingent equation をみたす $x(t)$ に対して

$$dx(t)/dt = f(t, x(t), u),$$

$$u \in \Omega(t, x(t))$$

なる u が求まるがこの u を適当に選んで $u=u(t)$ が可測函数とすることが出来れば（set value な函数に対する陰函数の定理を用いる。）この $x(t)$ は最初の制御問題の方程式をみたしていることになる。

$F(t,x)$ が (t,x) に関して連続な場合の contingent equation については、A. Marchaud, S. K. Zaremba が contingent derivative を用いて解の存在および解の種々の性質を調べている。

また、T. Wazewski はこの理論を上に述べた方法によって、制御問題と結びつけ、制御問題の統一的な研究をおこなっている。（[6]）.

ここでは、$F(t,x)$ が Carathéodory type の条件をみたすとき、contingent derivative は用いず（従って、Marchaud-Zaremba の結果は用いず。）contingent equation の解の存在を示し、さらに、解の性質を調べ、これらをもとにして contingent equation に対する制御問題を考えることにする。（[3], [4], [5]）.

なお、compact and convex set value な函数論については、[1], [2] を参照されたし。基本的な性質を始めとし、写像度の定義があり、不動点定理が示されてある。さらにルベーク積分も定義され、その性質が調べられてある。

§2. 定義および記号

X は $x, y\ (\in X)$ 間の距離を $dist(x, y)$ とする，距離空間とする。 $x\ (\in X)$ と集合 $A\ (\subset X)$ の距離 $dist(x, A)$ は次の様に定義する。

$$dist(x, A) = \inf\{\, dist(x, y);\ y \in A \,\}.$$

$Comp(X)$ ($Conv(X)$) で X の中の compact sets (compact and convex sets) 全体の集合をあらわす。

$Comp(X) \ni A, B$ 間の距離を次のような Hausdorff の距離 $Dist(A, B)$ で定義すれば $Comp(X)$ は距離空間になる。

$$Dist(A, B) = \inf\{\, \delta > 0;\ V(A, \delta) \supset B,\ V(B, \delta) \supset A \,\}.$$

ここに $V(A, \delta)$ は次のように定義される。

$$V(A, \delta) = \{\, x \in X;\ dist(x, A) \leq \delta \,\}.$$

集合 $A\ (\subset X)$ の境界は $bdry\,A$ であらわし，A を含む最小の compact and convex set を $conv\,A$ であらわす。

n 次元ユークリッド空間 R^n の集合 A にたいして $|A|$ は次の様に定義される。

$$|A| = Dist(A, 0).$$

ここに，0 は R^n の原点である。

I は R^1 上の compact interval $[t_0, t_0 + a]$ とする。

a.e. I は 'I の上のほとんどいたる所' を意味する。
I で可測な函数全体の集合を meable(I) であらわす。

定義1. T は topological space とする。T で定義された函数 $F(t) \in Comp(X)$ が $t_0 \in T$ で連続であるというのは、任意の $\varepsilon > 0$ にたいして、t_0 の近傍 U が求まって、

$$V(F(t_0), \varepsilon) \supset F(t), \quad V(F(t), \varepsilon) \supset F(t_0)$$

が U のすべての t にたいして成り立つことをいう。
T のすべての点で $F(t)$ が連続のとき、$F(t)$ は T で連続であるという。

定義2. E は可測空間とする。E で定義された函数 $F(t) \in Comp(X)$ が E で可測であるというのは、すべての $C \in Comp(X)$ にたいして、集合

$$\{t \in E;\ F(t) \subset C\}$$

が E で可測のことである。

仮定 $H(F)$. $F(t, x)$ は $I \times R^n$ で定義され、値を $Comp(R^n)$ にとる函数で、t に関しては可測、x に関して連続であるとする。また積分可能な函数 $k(t)$ が存在し

$$|F(t, x)| \leqq k(t), \text{ a.e. } t \in I$$

が成り立つ。

仮定 $H_1(F)$. $F(t, x) \in Conv(R^n)$.

定義3.（Wazewski）　I で定義された絶対連続な函数 $x(t)$ が次の関係をみたすとき，$x(t)$ は $F(t,x)$ の trajectory であるという。

$$dx(t)/dt \in F(t,x(t)),\quad a.e.\ I.$$

$F(t,x)$ の trajectories 全体の集合を $\{F\}$ であらわす。

定義4.（Wazewski）　I で定義された絶対連続な函数 $x(t)$ にたいして次の関係をみたす函数列 $\{x_i(t)\}$ が存在するとき，$x(t)$ は $F(t,x)$ の quasi-trajectory であるという。

$$x_i(t);\ I\ \text{で絶対連続}\quad (i=1,2,\cdots),$$
$$|x_i'(t)| \leqq k(t) \quad (a.e.\ I),$$
$$x_i(t) \longrightarrow x(t) \quad t\in I, \qquad i\to\infty$$
$$dist(x_i'(t), F(t,x_i(t))) \to 0 \quad a.e.\ I.$$

$F(t,x)$ の quasi-trajectories 全体の集合を $\{F\}^*$ であらわす。

A は R^n の集合とする。$T(A,F)$ によって初期条件 $x(t_0)\in A$ をみたす $F(t,x)$ の trajectories 全体の集合をあらわし，$Z(A,F)$ によってそれらの graph $(\subset I\times R^n)$ の和集合をあらわす。$\tau\in I$ に対して，$S(A,F,\tau)$ $(\subset R^n)$ は $Z(A,F)$ の $t=\tau$ における切り口をあらわす。

§3. Contingent equation の解の幾つかの性質

定理1. 仮定 $H(F)$ のもとに

$$\{F\}^* = \{\mathrm{conv}\, F\}$$

が成り立つ。

以下の定理において F は仮定 $H(F)$ および $H_1(F)$ をみたすものとする。

定理2（[3]）. すべての $x_0 \in R^n$ にたいして初期条件 $x(t_0) = x_0$ をみたす $F(t, x)$ の trajectory $x(t)$ は I 全体において存在する。

定理3（[3]）. $\mathrm{Comp}(R^n) \ni A$ にたいして $T(A, F)$ は一様収束の位相で compact である。

定理4（Kneser）（[4]）. $\mathrm{Comp}(R^n) \ni A$ が連結しているときすべての $\tau \in I$ にたいして $S(A, F, \tau)$ は連結体である。

定理5（Hukuhara）（[4]）. $\mathrm{bdry}\, Z(A, F)$ 上のすべての点は $\mathrm{bdry}\, Z(A, F)$ 上ばかり通る trajectory で $\mathrm{bdry}\, A$ と結ぶことができる。

定理6（bang-bang type）（[5]）. $\mathrm{bdry}\, Z(A, F)$ 上ばかり通る trajectory $x(t)$ については、その導函数 $dx(t)/dt$ はその間のほとんどいたるところで次の関係をみたす。

$$dx(t)/dt \in \mathrm{bdry}\, F(t, x(t)).$$

§4. Contingent equation の制御問題

$u \in R^r$ はコントロール径数。

$F(t, x, u)$ は $I \times R^n \times R^r$ で定義され，値を $Comp(R^n)$ にとる函数，$Q(t, x)$ は $I \times R^n$ で定義され，値を $Comp(R^r)$ にとる函数とする。

次の関係をみたす I で絶対連続な $x(t)$ を制御系 $\{F, Q\}$ の trajectory という。

$$dx(t)/dt \in F(t, x(t), u(t)) \quad a.e.\ I,$$

$$u(t) \in mesble(I),$$

$$u(t) \in Q(t, x(t)).$$

$\{F, Q\}$ に次の様な仮定をおく。

1). $F(t, x, u)$ は t に関しては可測，(x, u) に関しては連続。

2). $Q(t, x)$ は t に関しては可測，x に関しては連続。

3). $R(t, x) \equiv F(t, x, Q(t, x)) \in Conv(R^n)$ であって，I で積分可能な函数 $k(t) \geqq 0$ に対して次の関係が成り立つ。

$$|F(t, x)| \leqq k(t), \quad a.e.\ I.$$

$A \in Comp(R^n)$. $K(t) \in Comp(R^n)$ は I で定義され連続，$C(t, x)$ は $I \times T(A, F)$ で定義され，(t, x) に関して連続な実数値函数とする。

制御函数は可測な函数とする。

制御函数 $u(t)$ に対応して

$$dx(t)/dt \in F(t, x(t), u(t)) \quad \text{a.e. } I,$$
$$u(t) \in Q(t, x(t)),$$
$$x(t_0) \in A$$

をみたす $x(t)$ がある $\bar{t} \in I$ において，$x(\bar{t}) \in K(\bar{t})$ をみたすとき，$u(t)$ は A を $K(t)$ に移すという。

考える問題は A を $K(t)$ に移す $u(t)$ の内で $C(t, x)$ を最小にする問題，および それに対応した trajectory $x(t)$ の性質を調べることである。

ここに，$C(t, x)$ にあらわれる x は $u(t)$ に対応する trajectory であり，t は $x(t) \in K(t)$ をみたす最小の t である。

定理7.（[4]）．A を $K(t)$ に移す制御函数 $u(t)$ が少くとも1つはあるものとする。このとき，$C(t, x)$ を最小にする最適制御函数 $u^*(t)$ は存在する。

定理8（[4]，[5]）．$C(t, x) \equiv t$，すなわち時間最適問題にかぎれば，この最適な trajectory の中には bdry $Z(A, R)$ の上ばかり通るものがあり，さらにその間のほとんどいたる t に関して次の関係が成り立つ。

$$dx(t)/dt \in \text{bdry } R(t, x(t)).$$

参考文献

[1] Hukuhara, M., Sur l'application semi-continue dont la valeur est un compact convexe, RIMS-11, Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., 1966.

[2] ———————, Intégration des applications measurables dont la valeur est un compact convexe, RIMS-15, Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., 1966.

[3] Kikuchi, N., Control problems of contingent equation, Publ. RIMS, Kyoto Univ. Ser. A.3 1967.

[4] ———————, On some fundamental theorems of contingent equations in connection with the control problems, Publ. RIMS, Kyoto Univ. Ser. A. 3 1967.

[5] ———————, On contingent equations satisfying the Carathéodory type conditions, (to appear).

[6] Wazewski, T., On an optimal control problem, Differential Equations and Their Applications, Proceeding of the Conference held in Prague, September 1962.